

Санін А.Ф.

# РАСЧЕТ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ КОНТАКТНОГО ЕЁ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ДИСКРЕТНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ПРОДОЛЬНЫМИ УСИЛИВАЮЩИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

*Днепропетровский национальный университет*

Особенностью решения является эффективный учет контактных сил взаимодействия между оболочкой и продольными силовыми элементами. Эта особенность проявляется в том, что решение задачи по определению поля напряжения в оболочке сводится к бесконечному числу уравнений состоящих в общем случае из трех уравнений относительно компонентов контактных сил взаимодействия  $q_1, q_2, q_{12}$ .

При классическом подходе к решению таких задач приходится решать бесконечное число связанных между собой уравнений, что приводит к значительной затрате времени на их решение даже с использованием ЭВМ.

Результаты теоретических расчетов сравниваются с результатами экспериментального определения поля напряжений в оболочке и позволяют сделать вывод о весьма хорошем совпадении теоретических и экспериментальных результатов.

Однако, для ряда практически важных случаев, как это будет показано в основной части работы, представляется возможность существенного упрощения при определении сил взаимодействия оболочка-продольные элементы.

В дальнейшем, будет показано, каким образом может быть достигнуто существенное упрощение в ходе решения весьма важной и актуальной в научном и практическом отношении задачи.

Для решения поставленной задачи можно воспользоваться известными дифференциальными зависимостями, описывающими напряженно-деформированное состояние как цилиндрической оболочки, так и продольных усиливающих элементов от действия произвольной внешней нагрузки.

В частности, расчет цилиндрической оболочки можно проводить, используя следующие уравнения [1]:

$$\begin{aligned}\Delta^8 \Phi_x + \frac{1-\nu^2}{C^2} \frac{\partial^4 \Phi_x}{\partial \alpha^4} &= -\frac{R^4}{D} X; \\ \Delta^8 \Phi_y + \frac{1-\nu^2}{C^2} \frac{\partial^4 \Phi_y}{\partial \alpha^4} &= -\frac{R^4}{D} Y; \\ \Delta^8 \Phi_z + \frac{1-\nu^2}{C^2} \frac{\partial^4 \Phi_z}{\partial \alpha^4} &= -\frac{R^4}{D} Z.\end{aligned}\tag{1}$$

Положительное направление координатных осей, перемещений, внутренних усилий и моментов, а также внешних нагрузок показано на рис. 1.

Обычно усиливающие продольные элементы выполняются в виде тонкостенных стержней. Для их расчета можно воспользоваться системой уравнений, представленных в таблице 1.

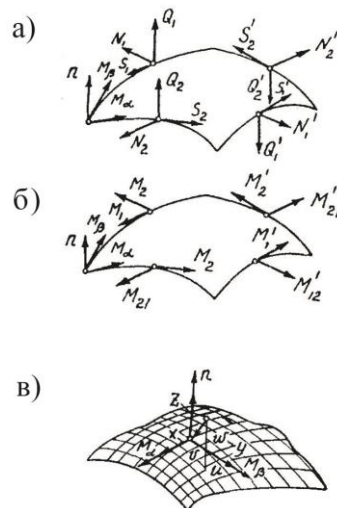


Рисунок 1 – Схема сил: а – моментів, б – перемещений, в – в елементі оболонки

Таблица 1

$u$	$v$	$w$	$\theta$	$Q$
$F\bar{D}^2$	$-S_y\bar{D}^3$	$-S_z\bar{D}^3$	$-S_w\bar{D}^3$	$= -\frac{1}{E}(q_x + T_L - T_K);$
$-S_y\bar{D}^3$	$-I_{yy}\bar{D}^4$	$-I_{yz}\bar{D}^4$	$-I_{wy}\bar{D}^4$	$= -\frac{1}{E}\left(q_y + T'_L y_L - T'_K y_K + \int_l y \frac{dp_x}{dx} ds\right);$
$-S_z\bar{D}^3$	$-I_{zy}\bar{D}^4$	$-I_{zz}\bar{D}^4$	$-I_{zw}\bar{D}^4$	$= -\frac{1}{E}\left(q_z + T'_L z_L - T'_K z_K + \int_l z \frac{dp_x}{dx} ds\right).$

В этой таблице введены следующие обозначения:

$$\bar{D}^i = \frac{d^i}{dx^i}; S_z = \int_F z dF; I_{zz} = \int_F z^2 dF \text{ и т.д.}$$

Отметим, что все характеристики усиливающих элементов определяются относительно местной системы координат (рис. 2).

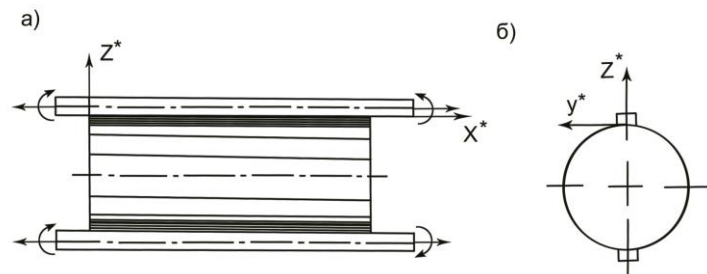


Рисунок 2 – Схема сил моментів, действующих на торец продольного силового элемента

Более подробное пояснение к таблице 1 можно найти в работах [2] и [3].

В целом ряде практически важных случаев система уравнений, представленная таблицей 1, существенно может быть упрощена. Например, при наличии симметрии геометрии сечения и деформации тонкостенного стержня относительно оси  $Z^*$  (рис. 2),

а также при отсутствии деформации поперечного сечения система уравнений может быть сведена к более простому виду:

$$\begin{aligned} F\bar{D}^2u - S_z\bar{D}^3w &= -\frac{1}{E}(q_x + q_L - T_Z); \\ S_z\bar{D}^3u - I_{zz}\bar{D}^4w &= -\frac{1}{E}\left(q_z + q_L'z_L - q_Z'z_K + \int_l z \frac{dp_x}{dx} ds\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Если на продольные элементы действует лишь краевая нагрузка и реакция оболочки, то в этом случае возможны дальнейшие упрощения:

$$\begin{aligned} F\bar{D}^2u - S_z\bar{D}^3w &= -\frac{1}{E}q_x; \\ S_z\bar{D}^3u - I_{zz}\bar{D}^4w &= -\frac{1}{E}q_z, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $q_x$  и  $q_z$  – составляющие реакции со стороны оболочки на стержень в направлении осей  $X^*$  и  $Z^*$ .

Излагаемая методика решения задачи принципиально позволяет производить расчеты цилиндрической оболочки, подкрепленной различными по геометрии и расположенными на произвольных расстояниях относительно друг друга продольными элементами.

Однако, в дальнейшем, будет рассмотрен частный случай, когда продольные элементы расположены по контуру поперечного сечения на равных расстояниях друг от друга, имеют одинаковую геометрию сечения и загрузки одинаковой внешней нагрузкой.

Заметим, что уравнения (1) и (3) легко можно было бы проинтегрировать, если бы были известны контактные силы взаимодействия между оболочкой и продольными элементами. Поскольку же последние неизвестны, то возникает дополнительная необходимость в их определении. При этом целесообразно воспользоваться тем обстоятельством, что характер распределения сил взаимодействия по поперечным сечениям оказывается известным и имеет вид всплеска нагрузки (рис. 3).

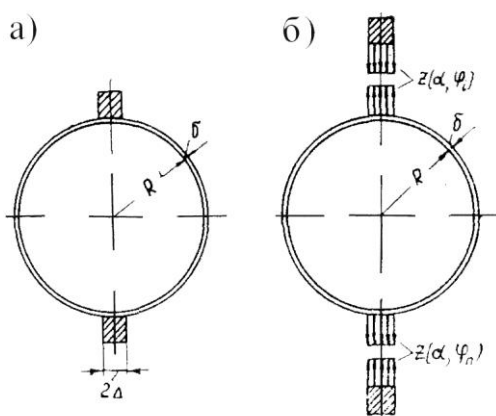


Рисунок 3

а – вид на оболочку с двумя продольными силовыми элементами; б – схема взаимодействия нормальных контактных напряжений, возникающих между продольным силовым элементом и оболочкой

В этом случае поверхностную нагрузку на оболочку от действия продольных элементов можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} X(\alpha, \varphi) &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_m A_n \cos \frac{m\pi\alpha R}{L} \cos sn\varphi; \\ Y(\alpha, \varphi) &= 0; \\ Z(\alpha, \varphi) &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z_m A_n \sin \frac{m\pi\alpha R}{L} \cos sn\varphi, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$A_n = \frac{4}{\pi} \frac{1}{sn} \sin sn\varphi_0; \quad A_0 = \frac{2}{\pi} \varphi_0; \quad \alpha = \frac{x}{R};$$

$2\varphi_0$  – центральный угол, характеризующий ширину контактируемого участка оболочки с продольным элементом;  $s$  – число продольных элементов.

Подобное представление поверхностной нагрузки позволяет существенным образом сократить объем вычислительных работ, так как сводит определение сил взаимодействия к решению бесконечного числа не связанных между собой систем алгебраических уравнений лишь третьего порядка. В общем случае требовалось бы решение бесконечной системы алгебраических уравнений при задании поверхностной нагрузки в виде:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_{mn} \cos \frac{m\pi\alpha R}{L} \cos sn\varphi; \\ Z &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z_{mn} \sin \frac{m\pi\alpha R}{L} \cos sn\varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Если считать, что загрузка оболочки происходит только через продольные элементы, то в этом случае для шарнирно опертой оболочки можно записать следующие выражения для потенциальной функции:

$$\begin{aligned} \Phi_x(\alpha, \varphi) &= -\frac{R^4}{D} \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_m \theta_{mn} \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi; \\ \Phi_z(\alpha, \varphi) &= -\frac{R^4}{D} \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z_m \theta_{mn} \sin \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{mn} &= \frac{A_n}{(\lambda_m^2 + \beta_n^2)^4 + \frac{1-\nu^2}{C^2} \lambda_m^4}; \\ \lambda_m &= \frac{m\pi R}{L}; \quad \beta_n = sn; \quad c^2 = \frac{\delta^2}{12R^2}; \quad D = \frac{\delta^3 E}{12(1-\nu^2)}; \end{aligned}$$

$X_m, Z_m$  – подлежащие определению величины, характеризующие взаимодействие оболочки с продольными элементами.

Располагая выражениями для потенциальной функции (6), можно вычислить перемещения цилиндрической оболочки по линии контакта ее с продольным элементом [1]:

$$\begin{aligned} u_x^0 &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_m u_{xmn}^0 \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi; \\ w_x^0 &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_m w_{xmn}^0 \sin \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi; \\ u_z^0 &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z_m u_{zmn}^0 \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi; \\ w_z^0 &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z_m w_{zmn}^0 \sin \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} u_{xmn}^0 &= \frac{R^4}{D} - \left\{ \lambda_m^2 + c^2 \left[ \lambda_m^2 + \frac{2}{1-\lambda} \beta_n^2 \right] (\lambda_m^2 + \beta_n^2) \right\} \theta_{mn}; \\ \omega_{xmn}^0 &= -\frac{R^4}{D} \left\{ \lambda_m \beta_n^2 - \nu \lambda_m^3 \right\} \theta_{mn}; \\ u_{zmn}^0 &= -\frac{R^4}{D} \left\{ \lambda_m \beta_n^2 - \nu \lambda_m^3 \right\} \theta_{mn}; \\ \omega_{zmn}^0 &= \frac{R^4}{D} \left\{ \lambda_m^2 + \beta_n^2 \right\}^2 \theta_{mn}. \end{aligned}$$

Введенная индексация в обозначении перемещений  $u_x^0, w_x^0 \dots$  означает, во-первых, что речь идет о перемещениях оболочки, и, во-вторых, что данное перемещение соответствует поверхностной нагрузке либо  $X(\alpha, \varphi)$ , либо  $Z(\alpha, \varphi)$ . Аналогичная индексация применяется и при определении перемещений продольных элементов (стрингеров).

Таким образом, для рассматриваемого случая, когда поверхностная нагрузка имеет лишь две составляющие:  $X(\alpha, \varphi)$  и  $Z(\alpha, \varphi)$ , суммарные перемещения в оболочке от действия сил со стороны продольных элементов можно представить таким образом:

$$\begin{aligned} u^0 &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( X_m u_{xmn}^0 + Z_m u_{zmn}^0 \right) \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi; \\ w^0 &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( X_m w_{xmn}^0 + Z_m w_{zmn}^0 \right) \sin \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Обращаясь к интегрированию системы дифференциальных уравнений (3), описывающих напряженно-деформированное состояние тонкостенного стержня, и учитывая рис. 3, что

$$\begin{aligned} T_k(\alpha) &= X(\alpha, \varphi_i) 2\Delta; \\ q_z(\alpha) &= Z(\alpha, \varphi_i) 2\Delta, \end{aligned} \quad (9)$$

получим следующие выражения осевых и радиальных перемещений усиливающего элемента по линии контакта его с оболочкой:

$$\begin{aligned} u^c &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( X_m u_{xmn}^c + Z_m u_{zmn}^c \right) \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi_i + \\ &\quad + A_0 + A_1 \alpha R + A_2 \frac{(\alpha R)^2}{2}; \\ w^c &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( X_m w_{xmn}^c + Z_m u_{zmn}^c \right) \sin \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi_i + \\ &\quad + B_0 + B_1 \alpha R + B_2 \frac{(\alpha R)^2}{2} + B_3 \frac{(\alpha R)^3}{6}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} u_{xmn}^c &= \frac{2\Delta R^3}{E} \lambda_m^{-2} \frac{p_0}{R} A_n; \quad u_{zmn}^c = -\frac{2\Delta R^3}{E} \frac{r_0}{\lambda_m^3} A_n; \\ w_{xmn}^c &= \frac{2\Delta R^4}{E} \lambda_m^{-3} \frac{r_0}{R} A_n; \quad w_{zmn}^c = -\frac{2\Delta R^3}{E} \frac{S_0}{\lambda_m^4} A_n; \\ p_0 &= \frac{I_{zz}}{-FI_{zz} + S_z^2}; \quad r_0 = \frac{S_{zz}}{-FI_{zz} + S_z^2}; \quad S_0 = \frac{F}{-FI_{zz} + S_z^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Постоянные интегрирования  $A_i$  и  $B_i$  легко определяются из граничных условий. Например, для осевых перемещений ( $u^c$ ):

$$\begin{aligned} \text{при } \left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0; \\ \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [u^c]' &= [u_0^c]'; \\ \text{при } \alpha &= \frac{\alpha_0}{2} \quad u^c &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Для радиальных перемещений ( $w^c$ ):

$$\text{при } \left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0; \\ \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [w^c]'' &= [w^c]'' \text{ и } w = 0. \quad (13)$$

Удовлетворение граничным условиям приводит к следующим окончательным выражениям для осевых и радиальных перемещений усиливающих элементов:

$$\begin{aligned}
u^c &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( X_m u_{xmn}^c + Z_m u_{zmn}^c \right) \cos \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi_i + \\
&\quad + \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} u_{0m}^r \cos \lambda_m \alpha; \\
w^c &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( X_m w_{xmn}^c + Z_m w_{zmn}^c \right) \sin \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi_i + \\
&\quad + \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} w_{0m}'' \sin \lambda_m \alpha,
\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
u_{om}' &= -\frac{4}{\alpha_0} \left[ u_o^c \right]' R \left( \frac{\alpha_0}{m\pi} \right)^2; \\
w_{om}'' &= -\frac{4}{\alpha_0} \left[ w_o^c \right]'' R^2 \left( \frac{\alpha_0}{m\pi} \right)^3.
\end{aligned}$$

Таким образом, в выражения для осевых и радиальных перемещений оболочки, а также для продольных элементов вошли неизвестные величины  $X_m$  и  $Z_m$ . Для их определения можно воспользоваться условием равенства перемещений оболочки и продольных элементов по линии их контакта.

Поскольку все необходимые величины известны, то из условия

$$\begin{aligned}
u^o(\alpha, \varphi_i) &= u_i^c(\alpha, \varphi_i); \\
w^o(\alpha, \varphi_i) &= w^c(\alpha, \varphi_i)
\end{aligned} \tag{15}$$

можно получить следующие уравнения для определения неизвестных  $X_m$  и  $Z_m$ :

$$\begin{cases}
X_m \sum_{n=0}^{\infty} \left( -u_{xmn}^c + u_{xmn}^0 \right) \cos \beta_n \varphi_i + \\
+ Z_m \sum_{n=0}^{\infty} \left( u_{zmn}^c + u_{zmn}^0 \right) \cos \beta_n \varphi_i = u_{0m}'; \\
X_m \sum_{n=0}^{\infty} \left( -w_{xmn}^c + w_{xmn}^0 \right) \cos \beta_n \varphi_i + \\
+ Z_m \sum_{n=0}^{\infty} \left( w_{zmn}^c + w_{zmn}^0 \right) \cos \beta_n \varphi_i = w_{0m}'' .
\end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что входящие в уравнение (16) суммы

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{xmn}^c, \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_{zmn}^c, \quad \sum_{n=0}^{\infty} w_{xmn}^c, \quad \sum_{n=0}^{\infty} w_{zmn}^c \tag{17}$$

могут быть легко записаны в конечном виде. В самом деле, рассмотрим, например,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{xmn}^c = \frac{2\Delta R^2}{E\lambda_m^2} P_0 \left( \frac{2}{\pi} \varphi_0 + \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{sn} \sin sn\varphi_0 \cos \beta_n \varphi_i \right),$$

но так, как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{sn} \sin sn\varphi_0 \cos \beta_n \varphi_i = \frac{1}{2S} (\pi - sn),$$

то окончательно получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{xmn}^c = \frac{2\Delta R^2}{E\lambda_m^2} P_0 \frac{2}{S}.$$

Аналогичным образом вычисляются и остальные значения сумм [см. выражение (17)].

В тех случаях, когда продольные элементы, усиливающие оболочку, имеют различную геометрию сечения, загружены различными силами и т.п., в этих случаях условие совместности (15) следует записывать для каждого продольного элемента и оболочки в отдельности. Это приведет к увеличению числа неизвестных так, что, в самом общем случае определение неизвестных сведется к решению бесконечного числа не связанных между собой систем алгебраических уравнений, содержащих по  $k$  неизвестных. Причем  $k$  означает число продольных усиливающих элементов.

Изложенная выше методика расчета была использована при исследовании напряженного состояния цилиндрической оболочки, подкрепленной двумя продольными элементами (рис. 2). При этом нормальные осевые напряжения определялись по следующей формуле:

$$\sigma_1(\alpha, \varphi) = \frac{ER^3}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ - \left[ \lambda_m^3 + \frac{C^2}{1-\nu^2} ((2+\nu)\lambda_m \beta_n^2 + \lambda_m) \times \right. \right. \quad (18)$$

$$\left. \times (\lambda_m^2 + \beta_n^2) \right] X_m + \lambda_m^2 \beta_n^2 Z_m \} \theta_{mn} \sin \lambda_m \alpha \cos \beta_n \varphi.$$

Основные характеристики испытываемой конструкции:  $L = 100$  см;  $R = 12,5$  см;  $\delta = 0,08$  см, материал оболочки ст-3;  $2\Delta = 1,7$  см;  $H = 1,8$  см; материал стрингера Д = 16.

На рис. 4 приведены результаты теоретических расчетов осевых нормальных напряжений, отнесенных к некоторым средним напряжениям, определяемым по формуле

$$\delta_{cp} = \frac{P_0}{F_0 + F \frac{E}{E_0}}, \quad (19)$$

где  $P_0$  – внешняя осевая нагрузка;  $F_0$  и  $F \frac{E}{E_0}$  – площадь поперечного сечения оболочки и стрингера с учетом ее редуцирования.

Кроме того, на рис. 4 нанесены также результаты экспериментальных исследований.



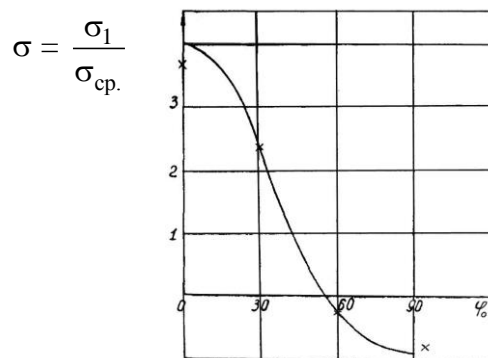


Рисунок 4 – Теоретические и экспериментальные относительные напряжения  $\sigma_1(\alpha, \varphi)$  в одном из поперечных сечений оболочки (при  $L = 0,5$  м)

На основании проведенных расчетов можно заключить, что при выбранных соотношениях жесткостей оболочки и усиливающих элементов, которые принимались при исследованиях, оболочка очень медленно включается в работу.

Как следует из анализа графика (рис. 4), от действия на продольные силовые элементы продольной силы  $P_0$ , в оболочке возникают зоны (от  $60^\circ$ – $120^\circ$ ), где напряжение в оболочке оказывается сжимающим, что может приводить к ее потере устойчивости.

При некоторых видах загрузки продольных элементов внешней нагрузкой нормальная составляющая сил взаимодействия оболочки с продольными элементами может оказать существенное влияние на напряженное состояние конструкции.

#### Выводы

1. Сравнение теоретических и экспериментальных значений напряжений показали для такого круга задач весьма высокое совпадение (рис. 4).

2. Теоретические и экспериментальные результаты позволили сделать вывод о том, что для принятых в работе размеров оболочки и силовых элементов, включение в работу оболочки происходит весьма замедленно. (График на рис. 4 приводится для случая когда  $X = \frac{L}{2}$ ).

3. Теоретически экспериментальные результаты обнаружили (при растягивающих силах, действующих на границы продольных силовых элементов) зоны сжатия, в оболочке (охватывающие до  $60^\circ$  в кольцевом направлении).

Отмеченный в пункте 3 факт наличия зон сжатия весьма важен, так как при определенных значениях внешних растягивающих нагрузках возможно появление лобальной потери устойчивости оболочки, что может являться причиной снижения либо внешней нагрузки, либо (если это возможно из компоновочных изображений) увеличения числа продольных силовых элементов.

#### Литература

1. Власов, В.З. Избранные труды. Т. 1 [Текст]/ В.З. Власов. – М.: АН СССР, 1962.– 528 с.
2. Власов, В.З. Избранные труды. Т. 2 [Текст]/ В.З. Власов. – М.: АН СССР, 1963.– 508 с.
3. Власов, В.З. Избранные труды. Т. 3 [Текст]/ В.З. Власов. – М.: АН СССР, 1964.– 500 с.